Ecuaciones Diferenciales– 2° cuatrimestre 2015
CONVERGENCIA DE DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

Siempre todos los espacios van a tener a $\mathbb{R}$
Nosotros sabíamos que valía:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \quad f \in \mathcal{S} \tag{1}$$

Y queríamos ver que podíamos extender esa expresión cuando $f = \dfrac{1}{1+x^2} \in L^2$, entonces como $f \notin \mathcal{S}$ uno podía usar que $i : L^2 \to \mathcal{S}'$ es subespacio y podemos identificar $L^2 \subset \mathcal{S}'$ mediante $f \mapsto T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}} f\phi dx$ donde $\phi \in S$. Entonces una sugerencia fundamental era usar que $i : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ es de rango denso. Que quiere decir esto? Simplemente que $\overline{i(\mathcal{S})}^{\mathcal{S}'} = \mathcal{S}'$ donde la clausura está tomada en la topología de $\mathcal{S}'$. Otra forma de decir esto mismo es que dada $\psi \in \mathcal{S}'$, $\exists f_k \in S$ tal que $i(f_k) = T_{f_k} \to \psi$ en $\mathcal{S}'$ donde $T_{f_k}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f_k\phi dx$. En resumen lo dicho se puede escribir como:

$$\overline{i(\mathcal{S})}^{\mathcal{S}'} = \mathcal{S}' \iff \text{Dada } \psi \in \mathcal{S}' \; \exists f_k \in \mathcal{S} \; / \int_{\mathbb{R}} f_k\phi dx \to \psi(\phi) \; \forall \phi \in \mathcal{S} \tag{2}$$

Ah buenísimo porque entonces ya sabemos que $\exists f_k \in \mathcal{S} \; / \; \int_{\mathbb{R}} f_k\phi dx \to \int_{\mathbb{R}} f\phi dx \; \forall \phi \in \mathcal{S}$.Ahora sí a los bifes! Notemos que la expresión $f(n)$ podría no tener mucho sentido cuando $f \in \mathcal{S}'$ pelado, pero aca sabemos que $f \in i(L^2 \cap C^\infty) \subset \mathcal{S}'$ y por ende tiene sentido evaluar esa función y $T_f = f(n)1$ donde 1 es la distribución que $1(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi dx$. En otras palabras el morfismo $ev_n : f \in i(L^2 \cap C^\infty) \to \mathcal{S}'$ esta bien definido y es continuo. Por otro lado nos queda la duda si podemos .evaluar.a $\hat{f}$, pero esto es simple pues tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L^2 \cap C^\infty \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "ev_n"'] & C_0 \cap L^2 \arrow[d, "ev_n"'] \\
\mathcal{S}' \arrow[r, dashed, "\overline{\mathcal{F}}"] & \mathcal{S}'
\end{tikzcd}$$

Y por conmutatividad del diagrama se ve que tiene sentido $ev_n(\hat{f}) = \hat{f}(n)$.

Ahora pongo las cosas ajenas a distribuciones que estaban dentro dle ejercicio, voy a usar, y no voy a probar:

1. Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $\sum_n f(n)$ está bien definido y converge.
2. Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $\sum_n \hat{f}(n)$ está bien definido y converge.
3. $\sum_n i(f)(n) \in \mathcal{S}'$
4. $\sum_n i(\hat{f})(n) \in \mathcal{S}'$

Y entonces lo que había que hacer en el ejercicio era probar que $\int_{\mathbb{R}} \sum_n f_k(n)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}} \sum_n f(n)\phi dx$ y que $\int_{\mathbb{R}} \sum_n \hat{f}_k(n)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}} \sum_n \hat{f}(n)\phi dx$ pues entonces tendríamos $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ como distribuciones temperadas.

Vayamos de a pasos!

1. $f_k(n)\phi \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ pues $\phi \in \mathcal{S}$ y por 1 y por ende por Fubini vale que $\int_{\mathbb{R}} \sum_n f_k(n)\phi dx = \sum_n \int_{\mathbb{R}} f_k(n)\phi dx$
2. Ahora sabemos que $|f_k(n)\phi| \leq \|\phi\|_{\mathcal{S}} \|f\|_{L^\infty} \chi_K \in L^1(\mathbb{R})$ (K compacto) pues $\phi \in \mathcal{S}$ por lo que, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que $\lim_k \int_{\mathbb{R}} f_k(n)\phi dx = \int_{\mathbb{R}} f(n)\phi dx$ donde usamos la hipótesis que i tiene rango denso.

3. Finalmente tenemos que $f(n)\phi \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ pues $\phi \in \mathcal{S}$ y por 3 y por ende por Fubini vale que $\int_{\mathbb{R}} \sum_n f(n)\phi dx = \sum_n \int_{\mathbb{R}} f(n)\phi dx$

Ahora juntandos los tres pasos, tenemos que $\int_{\mathbb{R}} \sum_n f_k(n)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}} \sum_n f(n)\phi dx!$

Paralelamente usando 2 y 4 tenemos que $\int_{\mathbb{R}} \sum_n \hat{f}_k(n)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}} \sum_n \hat{f}(n)\phi dx$. Por lo que juntando todo probamos que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} i(f)(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i(\hat{f})(n) \quad f = \frac{1}{1+x^2}$$

∎